Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 13 februarie 2010

Clasa a IX a

1. Să se rezolve în R ecuaţia: $[x]\cdot\{x\}=x\cdot|x|$, unde [a] reprezintă partea întreagă a numărului real a şi {a} reprezintă partea fracţionară a numărului real a.

Prof. Gheorghe Andrei (GMB)

2. Fie $a,b\in R$ cu $a^2 + b^2 = 1$ şi $x>0$. Să se arate că

$$\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{x+1}}\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{x+1}}+\frac{b}{\sqrt{x}}\right)<1+\frac{1}{x}$$

Prof. Gabriela Constantinescu

3. Se consideră paralelogramele ABCD, CEFG şi FHAI. Să se arate că dacă M şi N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor BEH respectiv DIG, atunci centrul de greutate al triunghiului ACF este mijlocul segmentului MN.

Prof. Cătălin Zîrnă

4. Se dau punctele A_1, A_2, A_3 şi A_4, conciclice şi H_1, H_2, H_3 şi H_4 ortocentrele triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ şi $A_1A_2A_3$. Arătaţi că $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram dacă şi numai dacă $H_1H_2H_3H_4$ este dreptunghi.

Prof. Dorin Arventiev

Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 13 februarie 2010

Clasa a X a

1. Fie $n \in N^*$ dat. Calculaţi $[S]$, unde $S = \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \log_2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k^2+k+1}}\right)$.

Prof. Nelu Chichirim

2. Se consideră $f : C \to C, f(z) = \frac{z}{1+|z|}$.

   a) Arătaţi că f este injectivă.

   b) Să se arate că $\operatorname{Im} f = \{z \in C / |z| < 1\}$.

Prelucrare G.M.B

3. Fie $a, b \in R$, a > b > 0. Fie ecuaţia $a^x + \frac{1}{b^x} = 2$. În ipoteza că această ecuaţie are o rădăcină $x_0 \neq 0$ arătaţi că:

   a) $x_0 < 0$

   b) $\exists u \in R$ astfel încât $a^u + \frac{1}{b^u} < 2$.

Prof. Dorin Arventiev

4. Fie $z_1, z_2 \in C^*$ de modul r şi $z = r^2 + \frac{(r+z_1)(r+z_2)(r^2+z_1z_2)}{z_1z_2}$.

   a) Să se arate că $z \in R$.

   b) Să se arate că $z \geq 0$.

Prelucrare G.M.B

Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 13 februarie 2010

Clasa a XI a

1. a) Arătaţi că: $\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^n \geq 1+\ln a,\ \forall n\in N^*,\ a\geq 1$.

   b) Demonstraţi că: $a-1\geq \ln a,\ \forall a\geq 1$.

   c) Demonstraţi că: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}-n\right)=\infty$.

Prof. Nelu Chichirim

2. Să se calculeze limitele:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x+a^x\right)^x-1}{\left(x+b^x\right)^x-1},\ a,b\in(0,\infty)-\{1\},\ b\cdot e\neq 1$.

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x+a^x\right)^x-b^{x^2}}{\left(x+b^x\right)^x-a^{x^2}},\ a,b\in(0,\infty)-\{1\},\ b\cdot e\neq a$.

Prof. Gheorghe Andrei

3. Să se rezolve în $M_3(Z)$ ecuaţia: $X^5=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Prelucrare GMB

4. Dacă $A\in M_4(R)$ cu proprietatea $A^4=O_4$, atunci există $B\in M_4(R)$ astfel încât $(I_4+A)^3=B^2$.

Prof. Constantin Caragea

Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 13 februarie 2010

Clasa a XII-a

1. Fie $n \in N$, $n \geq 3$ şi G un grup finit cu n elemente. Să se arate că $n \in \{3,4\}$ dacă şi numai dacă există $a, b \in G$ distincte astfel încât $G - \{a,b\}$ este subgrup.

Prof. Cătălin Zîrnă

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi H un subgrup propriu. Pentru $p \in N, p \geq 2$, se consideră $A = \{x \in G \,/\, x^p \in H\}$ şi $B = \{x \in G \,/\, x^{p+1} \in H\}$.

a) Să se arate că $A \neq \Phi$ şi $B \neq \Phi$.

b) Să se arate că $(A - B) \cap H = \Phi$.

Prof. Gabriela Constantinescu

3. Fie $f : [0,+\infty) \to R$, $f(x) = \begin{cases} \left(\sin \dfrac{1}{x}\right) \ln x, & x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$.

Arătaţi că f admite primitive pe $[0,+\infty)$.

Prof. Dorin Arventiev

4. Să se calculeze $\int e^x \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} + \ln \cos x \right) dx, \quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

GMB